

داود معصومی مهوار

ماجراهای کلاس ریاضی راز عدد



خیلی‌ها اعظم را تأیید کردند و من سکوت کردم. قدم می‌زدم و به دیگری که ساکت بودند نگاه می‌کردم.

لیلا گفت: «فکر می‌کنم این حرف اعظم مبهم است. واقعاً کی ما عددهای صحیح را به دو بخش تقسیم کردیم؟ کجای تعریف ما چنین معنایی دارد؟»

از اعظم می‌خواهم که تعریف عددهای صحیح زوج و فرد را تکرار کند و همگی فکر کنیم و ببینیم لیلا درست می‌گوید یا نه.

اعظم گفت: «بنا بر تعریف، عدد صحیحی که مضرب ۲ باشد زوج است و عدد صحیحی که یکی بیشتر از یکی از مضرب‌های ۲ باشد، فرد است.»

فریبا گفت: «من با این تعریف اعظم مشکلی ندارم، ولی فکر می‌کردم تعریف عددهای زوج و فرد چیز دیگری است. من فکر می‌کردم که بنا بر تعریف، عدد صحیحی که مضرب ۲ باشد زوج است و عدد صحیحی که زوج نباشد، فرد است. خب با این تعریف من روشن است که هیچ عدد صحیحی نمی‌تواند هم زوج باشد و هم فرد. چون در تعریف به روشنی تصریح کرده‌ایم که عدد فرد، زوج نیست.»

من گفتم: «بباید همگی سکوت کنید و به این دو تعریف توجه کنیم.»

پای تخته نوشتیم:

هم سؤال از علم خیزد هم جواب هم چنانک خار و گل از خاک و آب

و گفتم: «قبلاً اشاره کرده بودم که یکی از نشانه‌های عالم‌بودن، پرسیدن سؤال است. گاهی هم روی پرسش‌های شما مکث می‌کردیم، با اینکه شاید جواب آن سؤال در حد توانایی شما نبود و به اشاره‌ای بسنده می‌کردیم. در واقع اگر می‌خواهید درست استدلال کنید و نیز در حل مسئله قوی باشید، ذهن شما باید سؤال‌های خوبی بپرسد. کار ساده‌ای هم نیست. برای همین از پرسش‌ها استقبال می‌کردیم.»

بگذریم. الان می‌خواهم پرسشی طرح کنم تا به آن فکر کنید. اگرچه این پرسش تقریباً در یکی از جلسه‌های گذشته به طور سایه‌روشن طرح شده بود، ولی من آن را پیگیری نکردم، چون از بحث اصلی دورمان می‌کرد. سؤال این است: چرا یک عدد صحیح نمی‌تواند هم زوج باشد و هم فرد؟»

اعظم گفت: «یادم هست که من چیزی شبیه به همین را گفته بودم. الان هم همان را می‌گویم. یک عدد صحیح نمی‌تواند هم زوج باشد و هم فرد. زیرا خودمان بنا بر تعریفی که کرده‌ایم، عددهای صحیح را به دو بخش زوج و فرد تقسیم کرده‌ایم.»

فرزانه گفت: «لان من سؤال را درک کرده‌ام و این پاسخ را نیز قبول دارم، ولی به نظرم این قدر دنگ و فنگ لازم نداشت. خیلی ساده می‌توانیم از کسی که شک دارد و فکر می‌کند که یک عدد صحیح ممکن است هم زوج باشد و هم فرد، بخواهیم که چنین عددی را مثال بزند و اگر نمی‌تواند، قبول کند که چنین عددی وجود ندارد. به قول معروف: بهترین دلیل برای وجود شیء وقوع آن شیء است.»

سایه با تردید توضیح داد: «فکر می‌کنم این استدلال فرزانه درست نیست. سراغ داشتن و ارائه مثال نقض، ادعا را رد می‌کند، ولی نداشتن مثال نقض به تنهایی چیزی را نه رد و نه اثبات می‌کند. در واقع حق نداریم به کسی بگوییم: من درست می‌گویم، زیرا تو نتوانستی نادرستی گفته‌های مرا اثبات کنی!»

من گفتم: «سایه درست می‌گوید. وقت زیادی هم نداریم، پس من به دو مورد تاریخی اشاره می‌کنم و کار را تمام می‌کنیم.»

مورد اول: از حدود ۲۴۰۰ سال پیش در هند و یونان این مسئله مطرح شده بود که: آیا عددهای صحیح X و Y به طوری وجود دارند که: $X^2 - 2Y^2 = 1$ باشد یا نه؟ سال‌ها بعد حالتی کلی‌تر مورد توجه قرار گرفت: آیا عددهای صحیح X و Y وجود دارند که: $X^2 - nY^2 = 1$ باشد یا نه؟ حالا به حالت $n = 991$ توجه کنید و به دنبال X و Y هایی باشید که $X^2 - 991Y^2 = 1$ باشد. اگر برای Y مثال‌هایی بزنید تا مربع کامل بودن $+1 + 991Y^2$ را بررسی کنید، احتمالاً شکست سختی خواهید خورد. اگر به جای Y هر یک از عددهای یک تا هزار را جاگذاری کنید، خواهید دید که $+1 + 991Y^2$ مربع کامل نیست. شاید سخت‌گیرترین آدم‌ها هم بعد از این همه آزمایش کوتاه بیایند و دست کم حس کنند که این آزمایش بی‌نتیجه است و $+1 + 991Y^2$ هیچ‌گاه مربع کامل نخواهد شد. ولی این حس درست نیست! اگر Y را عدد

$$120557357903313594474425318767$$

در نظر بگیرید، خواهید دید که $+1 + 991Y^2$ مربع عدد $379516400906811930638014896080$

است! و جالب‌تر اینکه این عدد کوچک‌ترین پاسخ این معادله است. اگر به این موضوع تاریخی علاقه داشتید «معادله Pell» را جست‌وجو کنید.

مورد دوم: پس از مرگ فرما در حاشیه یکی از کتاب‌های او این یادداشت را دیدند:

اگر n عدد صحیحی بزرگ‌تر از ۲ باشد، هیچ سه عدد صحیح X, Y و Z وجود ندارند که: $X^n + Y^n = Z^n$

او در حاشیه کتاب نوشته بود که این موضوع را اثبات کرده، اما اثبات طولانی است و در حاشیه کتاب نمی‌گنجد. سال‌ها ریاضی‌دانان به دنبال اثبات این «حدس» فرما بودند و کاری از پیش نبردند. حتی به تازگی پس از ساخت هر رایانه پیشرفته‌ای تلاش می‌کردند تا به کمک آن مثال نقضی برای این حدس بیابند، اما فایده‌ای نداشت. تا اینکه همین چند سال پیش بالاخره درستی این حدس ثابت شد.»

نفیسه پس از یک دقیقه گفت: «من باشم، تعریف فریبا را انتخاب می‌کنم. زیرا به روشنی به تفاوت زوج و فرد اشاره کرده است. اگر چه تعریف اعظم هم مشکل‌آفرین نیست. تعریف اعظم نیز اعتراف می‌کند که عدد فرد یکی بیشتر از عدد زوج است، پس نمی‌تواند خود عدد زوج باشد.»

فرزانه کلافه شده بود: «من واقعاً این سؤال و این بحث را درک نمی‌کنم. معلوم است که هیچ عدد زوجی فرد نیست. اگر به این سؤال بها بدهیم، لابد باید این سؤال را هم جواب بدهیم که: چرا هیچ عدد صحیحی نیست که نه زوج باشد و نه فرد؟»

من گفتم: «اتفاقاً سؤال خوبی پرسیدی که من منتظرش بودم. ولی از من بشنوید و باور کنید که پاسخ این سؤال خوب، ساده نیست. کسانی که در آینده رشته ریاضی را ادامه دهند با قضیه الگوریتم تقسیم آشنا می‌شوند و پاسخ را در آن خواهند یافت. به همین خاطر این سؤال خوب را رها می‌کنیم و به بحث اصلی خودمان برمی‌گردیم. خب کسی هست که درباره گفته‌های نفیسه نظری داشته باشد؟»

زهرآ گفت: من به این بخش «عدد فرد یکی بیشتر از عدد زوج است، پس نمی‌تواند خود عدد زوج باشد» شک دارم. به نظرم باید چنین اصلاح شود که «عدد فرد یکی بیشتر از عدد زوج است، پس نمی‌تواند خود آن عدد زوج باشد.»

با اشاره زهرآ را تأیید کردم و خیلی‌ها با تعجب به فکر فرو رفتند. **نرگس** گفت: «زهرآ درست می‌گوید. مثلاً فرض کنیم که عدد a فرد است، پس بنا بر تعریف اعظم باید به شکل $a = 2k + 1$ باشد و k نیز عددی صحیح باشد. خب واضح است که عدد a نمی‌تواند عدد $2k$ باشد. زیرا یکی بیشتر از آن است. ولی اینکه a برابر با این عدد زوج، یعنی $2k$ نیست، دلیل نمی‌شود که اصلاً a نتواند زوج باشد. شاید a برابر با عدد زوج دیگری مانند $2s$ باشد.»

پریسا به دلایلی این گفته نرگس را کاملاً نامعقول می‌دانست و با درخواست من پای تخته رفت و دلیل خود را چنین نوشت:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2k + 1 \\ a &= 2s \end{aligned} \right\} \rightarrow 2k + 1 = 2s \rightarrow$$

$$1 = 2s - 2k = 2(s - k) \rightarrow s - k = \frac{1}{2}$$

اینکه تفاضل دو عدد صحیح S و k برابر با یک دوم باشد، نشدنی است.

من گفتم: «اگر گفته‌های زهرآ و پریسا را به درستی کنار هم بچینیم، استدلال زیبایی ساخته‌ایم و جواب سؤال را نیز یافته‌ایم. در واقع باید چنین استدلال کنیم که:

گیریم که عدد صحیحی مانند a وجود داشته باشد که هم زوج باشد و هم فرد. پس بنا بر تعریف این عدد را به دو صورت

$$\left. \begin{aligned} a &= 2s \text{ و } a = 2k + 1 \\ a &= 2s \end{aligned} \right\} \rightarrow 2k + 1 = 2s \rightarrow$$

$$1 = 2s - 2k = 2(s - k) \rightarrow s - k = \frac{1}{2}$$

اینکه تفاضل دو عدد صحیح S و k برابر با یک دوم باشد نشدنی است. یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس فرضی که کردیم درست نبوده است و در واقع هیچ عدد صحیحی نمی‌تواند هم زوج باشد و هم فرد.»